Ein agentisches Mehr-Quadranten-Modell
als stratifizierte Prozesskategorie

26. März 2026

Zusammenfassung

Wir formulieren den agentischen Ansatz des Mehr-Quadranten-Modells (M-Q-M) in einer kompakten, paper-tauglichen mathematischen Form. Ausgangspunkt sind die vier Quadranten $Q_1, \ldots, Q_4$ mit den Rollen *Transformation*, *Prozess*, *Plan* und *Ergebnis*. Der vorgeschlagene Formalismus modelliert diese Struktur als stratifizierte Prozesskategorie mit vier gekoppelten Agenten $K_1, \ldots, K_4$, lokalen Zustandsräumen, einem zulässigen Kopplungsraum sowie einer globalen Aktualisierungsdynamik. Der kategoriale Kern wird als Primärmodell gewählt; geometrische, quaternionische oder topologische Erweiterungen bleiben optionale Sekundärstrukturen.

1 Einleitung

Das M-Q-M beschreibt Systeme durch vier Quadranten mit je drei Achsen. Im mathematischen Kern wird jeder Quadrant als Funktion seiner lokalen Koordinaten dargestellt,

$$Q_i = f_i(y_i, x_i, z_i), \qquad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \tag{1}$$

mit den Interpretationen x = Zeit, y = Raum und z = Modus bzw. Zustand. Zudem werden die Kopplungsbedingungen

$$y_1 = y_2, \qquad x_2 = x_3, \qquad y_3 = y_4, \qquad x_4 = x_1 \tag{2}$$

sowie die Bilanzrelationen

$$Q_3 = Q_2 + Q_4, \qquad Q_1 + Q_3 = C_H \tag{3}$$

für einen geeigneten Kopplungsparameter C_H des Hypersystems vorgegeben. In der mathematischen Vorlage wird zugleich empfohlen, den robusten Kern des Modells zunächst als (stratifizierte) Prozesskategorie zu formulieren und Geometrie erst nachgeordnet hinzuzufügen.

Auf dieser Grundlage definieren wir einen agentischen Formalismus mit der semantischen Zuordnung

$$K_3 = \text{Strategie/Plan}, \qquad K_2 = \text{Prozess/Vollzug}, \qquad K_1 = \text{Transformation/Governance}, \qquad K_4 = \text{Ergebnis}$$

Die Darstellungsreihenfolge bleibt somit (K_3, K_2, K_1, K_4), während die operative Komposition des M-Q-M als Zyklus

$$K_3 \to K_1 \to K_2 \to K_4 \to K_3$$

formuliert wird.

2 Axiomatischer Kern

Definition 2.1 (Agentisches M-Q-M-System)**.** *Ein* agentisches M-Q-M-System *ist ein Tupel*

$$\mathfrak{A} = (\mathcal{P}_K, \sigma, \leq, X, H, \Phi, \Psi, \mathcal{C}, \eta)$$

mit den folgenden Komponenten:

(i) $\mathcal{P}_K$ *ist eine kleine Kategorie, die wir* Prozesskategorie *nennen.*

(ii) $\sigma : \mathrm{Obj}(\mathcal{P}_K) \to \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ *ist eine Stratifikationsabbildung.*

(iii) $\leq$ *ist eine mereologische Relation auf Zuständen oder Teilzuständen.*

(iv) $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ *ist der Gesamtzustandsraum.*

(v) $H = H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4$ *ist der Raum exogener Einwirkungen des Hypersystems.*

(vi) $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ *ist die Familie lokaler Ausgabefunktionen.*

(vii) $\Phi : X \times H \to X$ *ist die globale Aktualisierungsabbildung.*

(viii) $\mathcal{C} \subseteq X$ *ist die Menge zulässiger gekoppelter Zustände.*

(ix) $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ *ist eine Familie nichtnegativer Bewertungs- oder Energiefunktionen* $\eta_i : X_i \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 2.2 (Strata und Agenten)**.** *Die Objektmenge von* $\mathcal{P}_K$ *enthält vier ausgezeichnete Agentenobjekte*

$$\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{P}_K)$$

mit der Stratifikation

$$\sigma(K_1) = Q_1, \qquad \sigma(K_2) = Q_2, \qquad \sigma(K_3) = Q_3, \qquad \sigma(K_4) = Q_4.$$

Wir interpretieren semantisch

$$Q_1 = \textit{Transformation}, \quad Q_2 = \textit{Prozess}, \quad Q_3 = \textit{Plan}, \quad Q_4 = \textit{Ergebnis}.$$

Definition 2.3 (Generatoren und Zyklus)**.** *Die Prozesskategorie* $\mathcal{P}_K$ *sei von den vier elementaren Morphismen*

$$\tau : K_3 \to K_1, \qquad \pi : K_1 \to K_2, \qquad \epsilon : K_2 \to K_4, \qquad \rho : K_4 \to K_3 \tag{4}$$

erzeugt. Der zugehörige Zyklusoperator *ist der Endomorphismus*

$$\Gamma := \rho \circ \epsilon \circ \pi \circ \tau \in \mathrm{End}(K_3). \tag{5}$$

Definition 2.4 (Lokale Zustände)**.** *Für jeden Agenten* K_i *sei der lokale Zustand durch ein M-Q-M-Achsentupel*

$$\xi_i = (y_i, x_i, z_i) \in X_i \tag{6}$$

gegeben. Die quadrantenbezogene Größe wird durch

$$q_i = f_i(y_i, x_i, z_i) \tag{7}$$

definiert.

Definition 2.5 (Zulässiger Kopplungsraum)**.** *Die Menge zulässiger gekoppelter Zustände sei*

$$\mathcal{C} := \Big\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in X \;\Big|\; y_1 = y_2,\ x_2 = x_3,\ y_3 = y_4,\ x_4 = x_1\Big\}. \tag{8}$$

Axiom 2.6 (Bilanzaxiome)**.** *Für alle zulässigen Zustände* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{C}$ *gelten die Relationen*

$$\eta_3(\xi_3) = \eta_2(\xi_2) + \eta_4(\xi_4) \tag{9}$$

und

$$\eta_1(\xi_1) + \eta_3(\xi_3) = C_H, \tag{10}$$

wobei $C_H \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *den Kopplungszustand zum Hypersystem parametrisiert.*

Axiom 2.7 (Mereologische Verträglichkeit)**.** *Für zulässige Teil-Ganzes-Beziehungen gelte*

$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_K}(a, b).$$

Das heißt: Jede zulässige mereologische Einbettung ist durch mindestens einen Prozessmorphismus realisierbar.

3 Dynamik

Definition 3.1 (Lokale Agentendynamik)**.** *Für jeden Agenten* K_i *sei eine lokale Übergangsfunktion*

$$\phi_i : X_i \times U_i \to X_i$$

gegeben. Die Eingangsräume werden zyklisch durch die Agentenausgaben gekoppelt:

$$U_1 = Y_3 \times H_1, \qquad U_2 = Y_1 \times H_2, \qquad U_3 = Y_4 \times H_3, \qquad U_4 = Y_2 \times H_4, \tag{11}$$

wobei Y_i *der Ausgaberaum des Agenten* K_i *ist.*

Definition 3.2 (Globale Aktualisierung)**.** *Die globale Aktualisierung* $\Phi : X \times H \to X$ *sei durch*

$$\Phi(\xi, h) = (\xi_1^+, \xi_2^+, \xi_3^+, \xi_4^+) \tag{12}$$

mit

$$\xi_1^+ = \phi_1(\xi_1, \psi_3(\xi_3), h_1), \tag{13}$$
$$\xi_2^+ = \phi_2(\xi_2, \psi_1(\xi_1), h_2), \tag{14}$$
$$\xi_3^+ = \phi_3(\xi_3, \psi_4(\xi_4), h_3), \tag{15}$$
$$\xi_4^+ = \phi_4(\xi_4, \psi_2(\xi_2), h_4) \tag{16}$$

definiert.

Bemerkung 3.3 (Lesart des Zyklus). Die Gleichungen (13)–(16) kodieren die agentische Lesart

$$K_3 \rightsquigarrow K_1 \rightsquigarrow K_2 \rightsquigarrow K_4 \rightsquigarrow K_3.$$

Dabei orientiert K_3 den Regelraum K_1, K_1 parametrisiert den Vollzug K_2, K_2 erzeugt Resultate in K_4, und K_4 liefert den reflektierten Ergebniszustand zurück an K_3.

4 Struktursätze

Satz 4.1 (Vorwärtsinvarianz des zulässigen Kopplungsraums). *Sei $\mathfrak{A}$ ein agentisches M-Q-M-System. Gelte für alle $(\xi, h) \in \mathcal{C} \times H$, dass die Aktualisierung Φ die Kopplungsrelationen respektiert, also*

$$y_1^+ = y_2^+, \qquad x_2^+ = x_3^+, \qquad y_3^+ = y_4^+, \qquad x_4^+ = x_1^+. \tag{17}$$

Dann ist $\mathcal{C}$ vorwärtsinvariant, d.h.

$$\Phi(\mathcal{C} \times H) \subseteq \mathcal{C}.$$

Beweis. Sei $(\xi, h) \in \mathcal{C} \times H$. Nach definition 2.5 erfüllt ξ bereits die vier Kopplungsgleichungen aus (8). Nach Voraussetzung erfüllt der aktualisierte Zustand $\Phi(\xi, h) = (\xi_1^+, \xi_2^+, \xi_3^+, \xi_4^+)$ wiederum genau die Relationen (17). Damit gilt per Definition erneut

$$\Phi(\xi, h) \in \mathcal{C}.$$

Da (ξ, h) beliebig war, folgt die Behauptung. □

Proposition 4.2 (Wohldefiniertheit des Zyklusoperators). *Unter den Voraussetzungen von definition 2.3 ist*

$$\Gamma = \rho \circ \epsilon \circ \pi \circ \tau$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von K_3.

Beweis. Die Morphismen $\tau, \pi, \epsilon, \rho$ sind nach definition 2.3 so typisiert, dass die Zielobjekte jeweils mit den Quellobjekten der nachfolgenden Morphismen übereinstimmen. Also ist die Komposition

$$K_3 \xrightarrow{\tau} K_1 \xrightarrow{\pi} K_2 \xrightarrow{\epsilon} K_4 \xrightarrow{\rho} K_3$$

wohldefiniert. Das Anfangs- und Endobjekt ist K_3; folglich ist $\Gamma \in \mathrm{End}(K_3)$. □

Satz 4.3 (Erhaltung der Bilanzrelationen entlang zulässiger Bahnen). *Sei $(\xi^{(n)})_{n \geq 0}$ eine diskrete Bahn mit*

$$\xi^{(n+1)} = \Phi(\xi^{(n)}, h^{(n)}), \qquad \xi^{(0)} \in \mathcal{C},$$

und gelte zusätzlich:

(a) $\Phi(\mathcal{C} \times H) \subseteq \mathcal{C}$,

(b) *die Bilanzaxiome* (9) *und* (10) *gelten für jeden Zustand in $\mathcal{C}$.*

Dann gelten für alle $n \geq 0$ die Relationen

$$\eta_3(\xi_3^{(n)}) = \eta_2(\xi_2^{(n)}) + \eta_4(\xi_4^{(n)})$$

und

$$\eta_1(\xi_1^{(n)}) + \eta_3(\xi_3^{(n)}) = C_H^{(n)}$$

mit einem jeweils durch das Hypersystem bestimmten Parameter $C_H^{(n)}$.

Beweis. Aus $\xi^{(0)} \in \mathcal{C}$ und der Vorwärtsinvarianz folgt per Induktion $\xi^{(n)} \in \mathcal{C}$ für alle $n \geq 0$. Da die Bilanzrelationen nach Voraussetzung für jeden zulässigen Zustand gelten, können sie auf jedes $\xi^{(n)}$ angewandt werden. Dies liefert unmittelbar die behaupteten Gleichungen. □

Korollar 4.4 (Kategoriales Minimalmodell)**.** *Vergisst man in definition 2.1 die lokalen Zustandsräume, die Dynamik und die Energiefunktionen, so bleibt das reduzierte System*

$$\mathfrak{A}_{\min} = (\mathcal{P}_K, \sigma, \leq)$$

übrig. Dieses ist eine stratifizierte Prozesskategorie. Sind zusätzlich alle Generatoren aus (4) *invertierbar, so erweitert sich $\mathcal{P}_K$ zu einem Gruppoid $\mathcal{G}_K$.*

Beweis. Die Stratifikation ist bereits durch σ gegeben; die mereologische Verträglichkeit bleibt durch $\leq$ erhalten. Damit erfüllt $(\mathcal{P}_K, \sigma, \leq)$ genau die Definition eines stratifizierten kategorialen Kerns. Sind die Generatoren invertierbar, so besitzt jeder erzeugte Morphismus eine Inverse; damit liegt definitionsgemäß ein Gruppoid vor. □

5 Diskussion und Ausblick

Der vorliegende Formalismus macht drei Ebenen explizit unterscheidbar:

(1) den *kategorialen Kern* als Prozessstruktur,

(2) die *Stratifizierung* nach Quadrantentypen, Mereologie und Dynamik,

(3) optionale *lokale Geometrie* auf den Strata.

Gerade diese Trennung ist für das M-Q-M mathematisch zweckmäßig: Der kategoriale Kern ist robust, erfordert keine Glattheitsannahmen und bleibt mit späteren Erweiterungen verträglich. Lokale geometrische Räume, Quaternionstrukturen, Faserbündel oder topologische Zyklensysteme können darauf aufgesetzt werden, ohne den axiomatischen Grundaufbau zu verändern.

Bemerkung 5.1 (Methodischer Status)*.* Die hier formulierte Struktur ist ein axiomatisches Arbeitsmodell. Sie erhebt nicht den Anspruch, bereits eine vollständige quaternionische oder topologische Theorie des M-Q-M zu beweisen. Vielmehr wird ein formal sauberer Kern definiert, an den solche Erweiterungen anschließen können.

Literatur

[1] M-Q-M Projektstatus 260212. Arbeitsdokument, PDF, insbesondere zu Quadrantenrollen, Achsen und Kopplungen.

[2] Das Multi-Quadranten-Modell. Arbeitsdokument, DOCX, insbesondere zu (1), (2) und (3).

[3] Mathematische Vorlage Agentisches System. Arbeitsdokument, DOCX, insbesondere zu Prozesskategorie, Stratifikation, Gruppoid und optionalen geometrischen Erweiterungen.